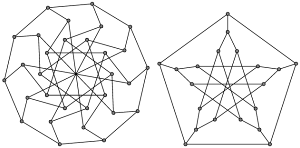
Matemática discreta III

Alexandre Quesney
Héctor Barge

Optativa del grado de Matemática e Informática



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

DMATIC - ETSI INFORMÁTICA (UPM)

Optativa (2023-2024)

Interacción combinatoria y álgebra

- El objetivo principal de esa asignatura consiste en introducir algunos esquemas de técnicas que permiten manejar varios problemas combinatorios y/o algebraicos de manera eficiente y conceptual.
- Para aquello, abordaremos diversos temas de complexidad moderada con aplicaciones en matemática, modelización e informática.
- En particular, veremos cómo técnicas clásicas del álgebra (diagonalización de matrices, teoría de grupos, funciones generadoras, etc) pueden utilizarse para tratar problemáticas que son, *a priori*, intrínsecamente combinatorios, y viceversa.

El **n-ésimo número de Catalan**, C_n, es la cantidad de secuencias

$$(e_1, e_2, ..., e_{2n}) \text{ con entradas } e_i = \pm 1,$$

tales que:

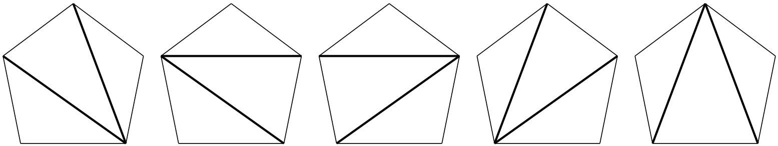
- hay n entradas $e_i = 1$,
- hay n entradas $e_j = -1$,
- $e_1 + e_2 + \cdots + e_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$.

- $C_1 = 1$: una sola secuencia $(1, -1)$.
- $C_2 = 2$: dos secuencias $(1, 1, -1, -1)$ y $(1, -1, 1, -1)$.
- $C_3 = 5$: cinco secuencias $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$,

$$\begin{array}{ccc} (1,1,-1,1,-1,-1), & & (1,1,-1,-1,1,-1), \\ (1,-1,1,1,-1,-1), & \text{y} & (1,-1,1,-1,1,-1). \end{array}$$

El número C_n corresponde a la cantidad de **triangulaciones** posibles de un polígono de $n+2$ aristas.

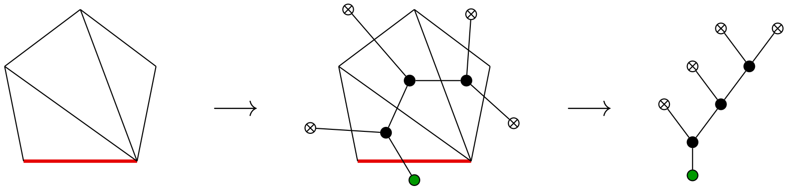
Para el pentágono, se tiene $C_3 = 5$ triangulaciones:



Los números de Catalan

C_n también corresponde al número de **árboles planares binarios completos** con $n+1$ hojas.

Árbol dual de la triangulación, eligiendo una arista como punto de partida:



Gracias a esas interpretaciones obtendremos diversas maneras interesantes de obtener la siguiente formula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Problema de las pilas de arena abeliano

El **modelo de las pilas de arena abeliano** es un modelo simple para procesos naturales complicados, tales como las avalanchas o los incendios forestales.

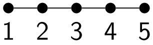
Tiene diversas variantes, como el *chip-firing game* y el *dollar game* que son estudiados en teoría de juegos y combinatoria estructural.

Problema de las pilas de arena abeliano

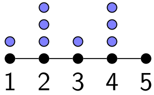
Los datos

- Una reja o, más generalmente, un grafo G.
- Pilas de arena dispuestas sobre este grafo: configuración $(a_v)_{v \in G}$ de números enteros no-negativos indexados por los vértices de G.
- A cada vértice v se le asocia un valor crítico c_v.

Ejemplo:

- grafo lineal de 5 vértices 

- configuración $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 3, 1, 3, 0)$
- nivel crítico de cada vértice es 2: $c_v = 2$ para todo v.



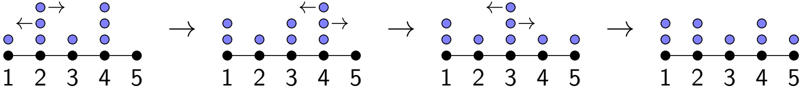
Problema de las pilas de arena abeliano

La dinámica

Si v tiene más granos de arena que su nivel crítico ($a_v > c_v$), entonces se puede transferir un grano a cada uno de sus vértices adyacentes, y se obtiene una nueva configuración.

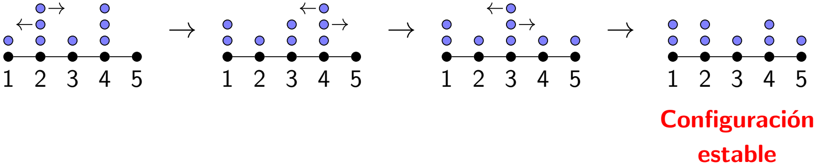
Ejemplo:

- grafo lineal de 5 vértices
- configuración $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 3, 1, 3, 0)$
- nivel crítico de cada vértice es 2: $c_v = 2$ para todo v.



Problema de las pilas de arena abeliano

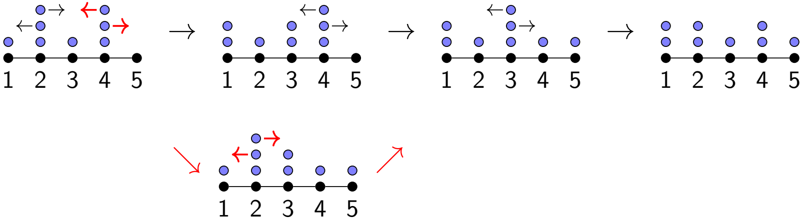
La evolución del sistema termina cuando se obtiene una configuración (a_v^s) tal que $a_v^s \leq c_v$ para todo vértice v; tal configuración es llamada **estable**.



No todo sistema puede estabilizarse.

Problema de las pilas de arena abeliano

En nuestro ejemplo, en lugar de que la primera transferencia sea la de los granos del vértice 2, podría ser la de los granos del vértice 4.



Veremos que, dada una configuración, si existe una configuración estable, ésa es **única** (no depende de la manera en la que el sistema evolucionó para estabilizarse).

Durante la evolución del sistema, ciertas configuraciones son **recurrentes** (tienen una probabilidad no nula de reaparecer).

¿Cómo caracterizar esas configuraciones? ¿Cuántas hay?

Las relacionaremos con los **árboles generadores del grafo** G y con **funciones de estacionamiento**.

Contenido de la asignatura

1. Sobre los números de Catalan
2. Recorridos en grafos
3. Enumeración en grafos
4. Enumeración bajo la acción de grupo
5. Posets y retículos
6. Modelo de las pilas de arena abeliano

Evaluación

- Sistema de evaluación continua:
    - entrega de prácticas (8/10)
    - presentación oral de prácticas (2/10).
- Sistema de evaluación por prueba final: realización de prueba escrita (10/10). Sólo para quien solicite no participar en la evaluación continua.

Bibliografía

- R. P. Stanley. *Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (2013).
- R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics* Vol 1, Cambridge University Press (1997).
- G. Pólya. *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*, Topics Combinatorial enumeration problems, 1887-1985, New York : Springer-Verlag (1987).
- Yan, C. H. *Parking functions*. In Handbook of Enumerative Combinatorics. Discrete Math. Appl., CRC Press, Boca Raton, FL, 835-893. (2015)
- D. Grinberg. *An Introduction to Algebraic Combinatorics*, `https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/21s/lecs.pdf`

Créditos: imagen del título generada por:
`https://texample.net/tikz/examples/combinatorial-graphs/`